Les calculatrices sont autorisées

N.B. : Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

PROBLEME

Notations et définitions

Dans tout le problème, n et p désignent deux entiers naturels non nuls. $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{C})$ désigne l'ensemble des matrices à n lignes et p colonnes à coefficients complexes. $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ désigne l'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients complexes. $\mathbf{I}_n$ désigne la matrice identité d'ordre n.
L'ensemble des entiers compris entre 1 et n sera noté $[\![1,n]\!]$.
On appellera matrice colonne d'ordre n toute matrice complexe à n lignes et 1 colonne. Ainsi, $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ est l'ensemble des matrices colonnes d'ordre n.

Soit $(A_q)_{q\in\mathbb{N}}$ une suite de matrices de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{C})$. Pour $q\in\mathbb{N}$, $1\leq i\leq n$ et $1\leq j\leq p$, on appelle $A_q[i,j]$ le coefficient sur la i-ième ligne et la j-ième colonne de la matrice A_q.
On dira qu'une telle suite $(A_q)_{q\in\mathbb{N}}$ converge vers la matrice $B=\left(B[i,j]\right)_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq p}}$ de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{C})$ lorsque :

$$\forall i\in[\![1,n]\!], \forall j\in[\![i,p]\!], \lim_{q\to\infty} A_q[i,j]=B[i,j].$$

On notera dans ce cas $B=\lim\limits_{q\to\infty} A_q$. Par exemple, si on pose pour tout entier $q>0$:

$$A_q=\begin{pmatrix} \cos\left(\dfrac{1}{q}\right) & e^{-q} \\ 1 & \dfrac{2q}{1+q} \end{pmatrix},$$

alors :

$$A_q[1,1]=\cos\left(\frac{1}{q}\right),\ A_q[1,2]=e^{-q},\ A_q[2,1]=1,\ A_q[2,2]=\frac{2q}{1+q} \text{ et } \lim_{q\to\infty} A_q=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Préliminaire

On détermine dans ce préliminaire trois résultats qui seront utiles pour les questions 6 et 7 de la partie I.

Pour la question P.1*, le détail des calculs devra figurer sur la copie. Pour les questions* P.2 *et* P.3*, on pourra faire usage de la calculatrice et ne mentionner que les résultats intermédiaires utiles.*

On définit les trois matrices A_1, A_2 et A_3 par :

$$A_1=\begin{pmatrix} 4 & 0 & 14 \\ \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 6 \\ -1 & 0 & -\frac{7}{2} \end{pmatrix},\ A_2=\begin{pmatrix} 3 & 2i & 6i \\ -2i & 3 & 7 \\ 2i & -2 & -5 \end{pmatrix} \text{ (où } i^2=-1\text{) et } A_3=\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

P.1 – Donner les valeurs propres de A_1 et justifier que A_1 est diagonalisable.

P.2 – Donner les valeurs propres de A_2 et justifier que A_2 est diagonalisable.

P.3 – Justifier que A_3 est diagonalisable, et donner une matrice inversible P, une matrice diagonale D telles que $P^{-1}A_3P=D$. Déterminer P^{-1}.

Partie I

Généralités sur les suites matricielles. Etude du cas diagonalisable

1 – Soient S et T deux matrices de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{C})$ et soient $(V_q)_{q\in\mathbb{N}}$ et $(W_q)_{q\in\mathbb{N}}$, deux suites de matrices de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{C})$ convergentes respectivement vers les matrices S et T, et soit $\lambda\in\mathbb{C}$. Prouver alors que la suite $(V_q+\lambda W_q)_{q\in\mathbb{N}}$ converge vers $S+\lambda T$.

2 – Soit r un entier naturel non nul et :

- $(V_q)_{q\in\mathbb{N}}$ une suite de matrices de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{C})$, convergente vers S ;
- $(W_q)_{q\in\mathbb{N}}$ une suite de matrices de $\mathcal{M}_{p,r}(\mathbb{C})$, convergente vers T.

Prouver alors que la suite $(V_qW_q)_{q\in\mathbb{N}}$ est convergente vers ST.

3 – Soit B une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Déduire du I.2 que si $(A_q)_{q\in\mathbb{N}}$ est une suite de matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, convergente vers B, et si P est une matrice inversible d'ordre n, alors la suite $(P^{-1}A_qP)_{q\in\mathbb{N}}$ converge vers $P^{-1}BP$.

Prouver également que si X et Y sont deux matrices colonnes d'ordre n, alors la suite de matrices colonnes $(A_qX+Y)_{q\in\mathbb{N}}$ converge vers $BX+Y$.

4 – On suppose, dans cette question 4 seulement, que A est une matrice carrée diagonale d'ordre n, de coefficients diagonaux $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ (qui peuvent être complexes) :

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Pour $q \in \mathbb{N}$, A^q désigne la q-ième puissance de A :

$$\begin{cases} A^0 = \mathbf{I}_n \\ \forall q \in \mathbb{N}, A^{q+1} = A.A^q \end{cases}.$$

On s'intéresse alors à la suite $\left(A^q\right)_{q\in\mathbb{N}}$ des puissances de A.

4.1 – Prouver que si pour tout $i \in [\![1, n]\!]$ on a $|\lambda_i| < 1$, alors la suite $\left(A^q\right)_{q\in\mathbb{N}}$ converge. Quelle est sa limite ?

4.2 – Prouver que s'il existe $i \in [\![1, n]\!]$ tel que $|\lambda_i| > 1$, alors la suite $\left(A^q\right)_{q\in\mathbb{N}}$ ne converge pas.

4.3 – Soit λ un nombre complexe <u>de module 1</u> tel que la suite de nombres complexes $\left(\lambda^q\right)_{q\in\mathbb{N}}$ converge vers un nombre complexe z.

4.3.1 – Justifier que $z \neq 0$.

4.3.2 – En remarquant que la suite $\left(\lambda^{q+1}\right)_{q\in\mathbb{N}}$ converge aussi vers z, montrer que $\lambda = 1$.

4.3.3 - En déduire que la suite de matrices $\left(A^q\right)_{q\in\mathbb{N}}$ converge, si et seulement si :

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \left(|\lambda_i| < 1 \text{ ou } \lambda_i = 1\right).$$

5 – Montrer que si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est une matrice carrée diagonalisable, dont chaque valeur propre λ vérifie $|\lambda| < 1$, alors la suite $\left(A^q\right)_{q\in\mathbb{N}}$ converge vers la matrice nulle.

6 – Déterminer si les suites de matrices $\left(A_1^q\right)_{q\in\mathbb{N}}$, $\left(A_2^q\right)_{q\in\mathbb{N}}$ et $\left(A_3^q\right)_{q\in\mathbb{N}}$ convergent et donner leurs limites éventuelles (les A_i sont les trois matrices définies dans la partie préliminaire). *On pourra faire usage de la calculatrice.*

7 – *Les résultats de cette question 7 ne sont pas utilisés dans la suite du problème.*

7.1 – Soit une matrice carrée A diagonale d'ordre n, de coefficients diagonaux $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Montrer que la suite de matrices $\left(S_q\right)_{q\in\mathbb{N}}$ définie par : $S_q = \sum_{k=0}^{q} \frac{1}{k!} A^k$ a une limite, notée $\mathbf{exp}(A)$, qu'on déterminera.

7.2 – Montrer que si A est une matrice carrée diagonalisable avec $A = PDP^{-1}$, où D est une matrice diagonale (d'ordre n) et $P \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{C})$, alors la suite $(S_q)_{q\in\mathbb{N}}$ définie par $S_q = \sum_{k=0}^{q} \frac{1}{k!} A^k$ converge vers une matrice notée $\mathbf{exp}(A)$, et que : $\mathbf{exp}(A) = P\,\mathbf{exp}(D)P^{-1}$.

7.3 – Calculer $\mathbf{exp}(A_3)$ où A_3 est définie dans le préliminaire (*on pourra utiliser la calculatrice pour faire certains produits matriciels*).

Partie II

Suites arithmético-géométriques matricielles

Etant données $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$, on définit par récurrence une suite $(X_q)_{q\in\mathbb{N}}$ de matrices colonnes d'ordre n par :

$$\begin{cases} X_0 \text{ est une matrice colonne donnée d'ordre } n \\ \forall q \in \mathbb{N}, X_{q+1} = AX_q + B \end{cases}.$$

On suppose de plus que 1 n'est pas valeur propre de A.

1 – Montrer que $A - \mathbf{I}_n$ est inversible.

2 – Démontrer qu'il existe une unique matrice colonne S, telle que $AS + B = S$.

3 – Prouver alors que :

$$\forall q \in \mathbb{N}, X_q = A^q(X_0 - S) + S.$$

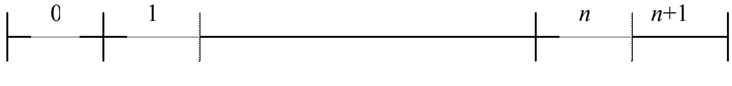
4 – En déduire que si A est diagonalisable et si toutes les valeurs propres λ de A vérifient $|\lambda| < 1$, alors :

$$\lim_{q\to\infty} X_q = S.$$

Partie III

Application à la diffusion de la chaleur dans une tige

On considère, dans cette partie, une tige homogène découpée en n+2 petits segments de longueurs identiques, numérotés de 0 à n+1.



On suppose les segments assez petits pour considérer la température comme constante sur chacun d'entre eux à un instant donné. On appelle $F(k,t)$ la température à l'instant $t \geq 0$ du segment numéroté k avec $k \in [\![0, n+1]\!]$. On fait les hypothèses suivantes :

• Après un intervalle de temps $\tau > 0$ (caractéristique de la longueur des segments et de la matière de la tige) la température à l'instant $t+\tau$, d'un segment autre que les deux segments extrêmes, a pour température la moyenne des températures à l'instant t des deux segments adjacents :

$$\forall t \in \mathbb{R}^+, \forall k \in [\![1, n]\!], F(k, t+\tau) = \frac{1}{2}\left[F(k-1, t) + F(k+1, t)\right].$$

• Le segment numéroté 0 est maintenu à la température de 20° C et le segment numéroté n+1 est maintenu à la température de 100° C :

$$\forall t \in \mathbb{R}^+, \left(F(0,t) = 20 \text{ et } F(n+1, t) = 100\right).$$

• On suppose enfin qu'à l'instant 0 le segment numéroté n+1 est à la température de 100° C et que tous les autres sont à la température de 20° C :

$$\begin{cases} \forall k \in [\![0, n]\!], F(k, 0) = 20 \\ F(n+1, 0) = 100 \end{cases}.$$

1 – Donner une matrice carrée A d'ordre n, et une matrice colonne $B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ tels que :

$$\forall t \in \mathbb{R}^+, \begin{pmatrix} F(1, t+\tau) \\ \vdots \\ F(n, t+\tau) \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} F(1,t) \\ \vdots \\ F(n,t) \end{pmatrix} + B.$$

2 – Pour $q \in \mathbb{N}$, on définit la matrice colonne X_q par :

$$X_q = \begin{pmatrix} F(1, q\tau) \\ \vdots \\ F(n, q\tau) \end{pmatrix}.$$

Justifier alors que pour tout entier naturel q on a : $X_{q+1} = AX_q + B$.

3 – On suppose $n = 4$ dans cette question.

3.1 – Ecrire dans l'un des langages de calcul formel du programme (MAPLE ou MATHEMATICA par exemple) une procédure permettant de calculer X_q en fonction de q. *On indiquera le langage utilisé.*

3.2 – Donner, à l'aide de la calculatrice, une valeur numérique de X_{10}. On donnera le résultat avec une précision de 10^{-1} sur chaque coordonnée.

4 – Soit $\omega \in \mathbb{R}$. On note U_ω la matrice colonne :

$$U_\omega = \begin{pmatrix} \sin(\omega) \\ \sin(2\omega) \\ \vdots \\ \sin(n\omega) \end{pmatrix}.$$

4.1 – Prouver que : $U_\omega = 0 \Leftrightarrow \sin(\omega) = 0$.

On supposera par la suite que $\sin(\omega) \neq 0$.

4.2 – Montrer que si λ est un réel tel que $AU_\omega = \lambda U_\omega$, alors $\lambda = \cos(\omega)$.

4.3 – Réciproquement, donner les valeurs de $\omega \in]0, \pi[$ pour lesquelles $AU_\omega = \cos(\omega) U_\omega$.

4.4 – En déduire que A est diagonalisable et donner une matrice inversible $P \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$ et une matrice diagonale $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, telles que $P^{-1}AP = D$.

Justifier que les valeurs propres de A appartiennent à]-1,1[.

5 – A l'aide de la partie II, justifier qu'il existe une unique matrice colonne S telle que $S = AS+B$, puis que $\lim\limits_{q \to \infty} X_q = S$. Quelle interprétation physique pouvez-vous donner de S ?

6 – Déterminer explicitement S. Interprétez le résultat.

Partie IV

Etude de la suite des puissances d'une matrice réelle

A désigne, pour toute la suite, une matrice carrée réelle d'ordre n. On appelle $(E_1,\ldots,E_n)$ la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. On munit $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ de son produit scalaire usuel ; on note $\|X\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$ la norme de la matrice colonne $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $(X|Y)$ le produit scalaire des matrices colonnes X et Y.

On notera que $(X|Y) = {}^tXY$ (*${}^tX$ désigne la transposée de X*).

1 – Montrer que la suite $(A^q)_{q\in\mathbb{N}}$ converge si et seulement si pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, la suite $(A^q E_k)_{q\in\mathbb{N}}$ de matrices colonnes converge.

On pourra introduire les colonnes $C_1(q),\ldots,C_n(q)$ de la matrice A^q.

2 – En déduire que la suite $(A^q)_{q\in\mathbb{N}}$ converge si et seulement si pour toute matrice colonne $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ la suite de matrices colonnes $(A^q X)_{q\in\mathbb{N}}$ converge.

3 – Démontrer que :

3.1 – S'il existe $k \in [0,1[$ tel que $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \|AX\| \leq k\|X\|$, alors la suite $(A^q)_{q\in\mathbb{N}}$ converge vers la matrice nulle.
On pourra établir que $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \forall q \in \mathbb{N}, \|A^q X\| \leq k^q \|X\|$.

3.2 – S'il existe $k \in]1,+\infty[$ tel que $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \|AX\| \geq k\|X\|$, alors la suite $(A^q)_{q\in\mathbb{N}}$ ne converge pas.

4 – Pour toute matrice colonne $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on pose $\varphi(X) = \|AX\|^2$. Soit g l'endomorphisme associé à ${}^tAA$. Montrer que :

$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \varphi(X) = {}^tX\,{}^tAAX = (X|g(X)).$$

5 – Justifier que ${}^tAA$ est semblable à une matrice diagonale dont les coefficients diagonaux seront notés $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$.

6 – Prouver qu'il existe une base orthonormale $\mathcal{B}=(u_1,\ldots,u_n)$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ de sorte que pour tout vecteur X de coordonnées $(y_1,\ldots,y_n)$ dans $\mathcal{B}$ on ait :

$$\varphi(X) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i^2 .$$

En déduire que les λ_i sont tous positifs ou nuls.

7 – On pose désormais $k_0 = \min\limits_{1\leq i\leq n} \lambda_i$ et $k_1 = \max\limits_{1\leq i\leq n} \lambda_i$. Prouver à l'aide de la question 3 que :

7.1 – Si $k_1 < 1$, alors la suite $(A^q)_{q\in\mathbb{N}}$ converge vers la matrice nulle.

7.2 – Si $k_0 > 1$, alors $(A^q)_{q\in\mathbb{N}}$ ne converge pas.

8 – On reprend la suite $(X_q)_{q\in\mathbb{N}}$ définie dans la partie II, et on suppose que $k_1 < 1$. Montrer que 1 n'est pas valeur propre de A et que pour tout entier q on a : $\|X_q - S\| \leq \left(\sqrt{k_1}\right)^q \|X_0 - S\|$.

9 – On reprend les notations de la partie III, avec $n = 4$. Déterminer à l'aide de la majoration ci-dessus un entier q_0 tel que pour $q \geq q_0$ on ait $\|X_q - S\| \leq 1$. En déduire que pour $q \geq q_0$ et pour tout $k \in [\![1,n]\!]$ on a $S_k - 1 \leq F(k, q\tau) \leq S_k + 1$ (les S_k désignent les coordonnées de S). Interpréter ce résultat.

Fin de l'énoncé