Pavage aléatoire de diamants aztèques

Le sujet choisi combine des considérations géométriques, probabilistes et combinatoires pour appréhender l'idée d'ordre issu de l'aléatoire, qui m'a intéressée car quelque peu contre-intuitive. J'ai aussi été séduite par la beauté et la force visuelle du résultat principal qu'il s'agit de démontrer : le théorème du cercle arctique.
Outre les milieux probabilisés et topologiques intervenant tout au long de l'étude, l'énoncé même du théorème s'inscrit dans le thème de l'année. Il porte sur le comportement asymptotique de la frontière arctique, interface entre une région centrale désordonnée et une région extérieure dont les tuiles pavantes présentent une homogénéité d'orientation.

Professeur encadrant du candidat :

Positionnement thématique (phase 2)

MATHEMATIQUES (Géométrie), MATHEMATIQUES (Algèbre), MATHEMATIQUES (Mathématiques Appliquées).

Mots-clés (phase 2)

Mots-Clés (en français)	**Mots-Clés** (en anglais)
Diamant aztèque	*Aztec diamond*
Pavage aléatoire	*Random tiling*
Cercle arctique	*Arctic circle*
Système de particules en interaction	*Interacting particle system*
Processus simple d'exclusion asymétrique	*Asymmetric simple exclusion process*

Bibliographie commentée

L'étude des pavages de structures géométriques, devenue depuis quelques décennies un pan important de la recherche en combinatoire et prisée pour ses applications en cristallographie, entre dans le cadre de la physique statistique dès lors qu'on fait tendre le nombre de tuiles pavantes vers l'infini. Aux questions usuelles de dénombrement s'ajoutent alors de nouvelles problématiques : à quoi ressemble un pavage "moyen" ? Y a-t-il apparition d'un motif à grande échelle, ou le désordre l'emporte-t-il ?
Le pavage du diamant aztèque se pose comme une bonne référence en la matière, par sa richesse combinatoire, ses propriétés asymptotiques remarquables et par les généralisations qu'on peut en proposer. Le problème est le suivant : il s'agit de paver par des dominos verticaux et horizontaux une région du plan en forme de carré tourné de 45°, appelée diamant aztèque.
En 1992, Elkies, Kuperberg, Larsen et Propp établissent par quatre moyens [2] le nombre de pavages par dominos du diamant aztèque d'ordre n, une preuve alternative en est proposée par Bosio et Van Leeuwen [1] en 2013. Les correspondances établies avec d'autres objets

mathématiques, dans un cas les matrices à signes alternants, dans l'autre les familles de chemins de Schröder non intersectantes, mettent en évidence la richesse des pavages de diamants aztèque sur un plan combinatoire. A ce titre, Romik développe en 2012 [5] le lien entre pavages de diamants aztèques et tableaux de Young, déjà à l'œuvre dans [3].
Dans l'optique d'une étude asymptotique des pavages en question, il est bon de savoir au préalable générer un pavage aléatoire. Pour cela, l'algorithme de touillage présenté par Propp [4] permet la génération équiprobable d'un pavage du diamant d'ordre n en générant successivement des pavages des diamants d'ordre inférieur. Forts de cela, venons-en à l'étude asymptotique à proprement parler, avec un résultat d'intérêt majeur : le théorème du cercle arctique. Etabli en 1995 par Jockusch, Propp et Shor [3], il énonce que la frontière arctique, séparant une région extérieure où les dominos sont d'orientation figée d'une région centrale désordonnée, tend vers le cercle inscrit au diamant lorsque l'ordre du diamant tend vers l'infini. Autrement dit, il y a propagation des effets de bord vers l'intérieur du diamant dans la limite d'un cercle arctique, phénomène distinctif du diamant aztèque par rapport au carré par exemple, pour lequel il ne se produit pas d'effet de bord. Ce résultat est prouvé par des outils de la théorie des systèmes dynamiques, pour cela il est ramené à un théorème de densité particulaire dans un processus stochastique discret appelé processus d'exclusion totalement asymétrique, à son tour ramené à de la classification de mesures sur l'ensemble {0;1}^Z.

Problématique retenue

Il s'agit d'étudier le pavage par des dominos des régions du plan appelées diamants aztèques, et en particulier le comportement asymptotique d'un pavage aléatoire lorsque l'ordre du diamant tend vers l'infini.

Objectifs du TIPE du candidat

Je me propose :
— d'explorer les propriétés combinatoires des pavages par dominos du diamant aztèque à travers différentes méthodes pour les dénombrer (théorème du diamant aztèque),
— d'étudier un algorithme de génération de pavages aléatoires (algorithme de touillage),
— de me familiariser avec la théorie de la mesure ainsi que celle des processus stochastiques [6],
— de comprendre la preuve et de cerner les arguments clés derrière un théorème mathématiquement riche (théorème du cercle arctique).

Abstract

In this work, I study domino tilings of finite regions of the plane called Aztec diamonds. A first combinatorial question is the number of such tilings for a given diamond, which is answered by the Aztec diamond theorem. In order to introduce randomness on the tilings, the shuffling algorithm offers a dynamical approach of great help. Last but not least, my study focuses on the asymptotic behavior of a random tiling when the size of the diamond goes to infinity, through a remarkable phenomenon known as the Arctic circle, proved with tools from the theory of interacting particle systems.

Références bibliographiques (phase 2)

[1] F. Bosio, M.A.A. van Leeuwen : A bijection proving the Aztec diamond theorem by combing lattice paths : *2013, Electronic Journal of Combinatorics 20, no. 4*

[2] N. Elkies, G. Kuperberg, M. Larsen, J. Propp : Alternating sign matrices and domino tilings : *1992, Journal of Algebraic Combinatorics 1 : 111*

[3] W. Jockush, J. Propp, P. Shor : Random domino tilings and the arctic circle theorem : *1995, arXiv:math/9801068*

[4] J. Propp : Generalized domino-shuffling : *2003, Theoretical Computer Science 303(2-3) :267–301*

[5] D. Romik : Arctic circles, domino tilings and square Young tableaux : *2012, The Annals of Probability 40, no. 2, 611–647*

[6] C. Shalizi : Theory of stochastic processes : *2007, CMU, cours 36-754 : Advanced Probability II*

[7] J. Bouttier, G. Semerjian : Pavages et lemme LGV, etc. : *2015, ENS, cours : Aspects rigoureux de la mécanique statistique à l'équilibre, TD5*

DOT

[1] *Compréhension du théorème du diamant aztèque et de différentes preuves*

[2] *Etude de l'algorithme de touillage et de ses propriétés*

[3] *Mise à niveau sur la théorie des processus stochastiques par des lectures complémentaires*

[4] *Compréhension du théorème du cercle arctique et de sa preuve*